LA CONTRIBUTION DE JAAKKO HINTIKKA À LA LOGIQUE MODALE DANS SES PREMIERS TRAVAUX

Gabriel Sandu

Texte traduit de l'anglais par Fabien Schang et relu par François Rivenc

Dans cet article, je me propose de comparer les premiers travaux de Hintikka en logique modale (Hintikka 1957b) avec les travaux de G. H. von Wright (1951) et de S. Kripke (1959). Hintikka et son professeur (von Wright) ont fini par défendre, via des trajectoires complètement différentes, un traitement des modalités dans lequel on a la notion de vérité logique sans (définir) la vérité. De ce fait, il a manqué aux deux auteurs un cadre modèle-théorique approprié (la vérité dans un monde possible) pour la logique modale. Cet aspect de la logique modale a été développé par Kanger (1957), Kripke (1959) et quelques autres. Pour des raisons d'espace, je vais me concentrer uniquement sur les travaux de Kripke. Mon interprétation des travaux de Hintikka sera peut-être un peu surprenante, mais je vais la défendre de façon détaillée.

G. H. von Wright

Les constituants

Le contexte des travaux de Hintikka en logique modale provient de C. I. Lewis (1932), Carnap (1946, 1947) et von Wright (1951).

C. I. Lewis (1932) a étudié la logique modale du point de vue de la théorie de la démonstration (*proof-theoretic*). Il considérait des principes aléthiques tels que :

(a) Si nécessairement *A*, et *A* entraîne *B*, alors nécessairement *B*

$$\frac{\Box A \qquad \Box(A \to B)}{\Box B}$$

(b) Toute loi logique est nécessaire

(c) S'il est nécessaire que A, alors il est nécessaire qu'il est nécessaire que A

$$\Box A \to \Box\Box A$$

etc.

G. H. von Wright a développé sa propre méthode en vue d'une étude de la logique modale. Elle est fondée sur la notion de *constituant*. Il a donné des conférences sur la notion de constituants à l'Université de Helsinki, au cours des années 1947-1948.

Pour un langage de la logique modale propositionnelle, lequel contient les variables propositionnelles $p_1, \ldots, p_n$, un constituant de la logique propositionnelle est simplement une description d'état carnapienne, c'est-à-dire la spécification complète d'un « monde possible » comme, par exemple, $C_1 := p \wedge \ldots \wedge p_n$, $C_2 := p \wedge \ldots \wedge \neg p_n$, etc. Il y a bien évidemment C^{2n} constituants. Deux constituants s'excluent mutuellement, et l'ensemble de tous les constituants est exhaustif. La *tautologie* qui constitue la disjonction de tous les constituants est dite en *forme normale disjonctive*.

Les choses se compliquent lorsque nous passons à la logique des prédicats. Par souci de simplicité, considérons un langage du premier ordre monadique contenant seulement deux symboles de prédicats M_1 et M_2. Un Q-prédicat est analogue à une description d'état en logique propositionnelle, à la différence près que nous avons désormais les symboles de prédicats M_j en lieu et place des symboles propositionnels p_i. Nous avons ainsi 4 Q-prédicats dans notre langage :

$$Q_1(x) = M_1(x) \wedge M_2(x)$$

$$Q_2(x) = M_1(x) \wedge \neg M_2(x)$$

$$Q_3(x) = \neg M_1(x) \wedge M_2(x)$$

$$Q_4(x) = \neg M_1(x) \wedge \neg M_2(x)$$

Un constituant a désormais la forme

$$C = \pm\exists x Q_1(x) \wedge \ldots \wedge \pm\exists x Q_4(x)$$

En d'autres termes, un constituant nous dit quels Q-prédicats sont instanciés et lesquels ne le sont pas. Deux constituants s'excluent mutuellement, et l'ensemble de tous les constituants est exhaustif. La disjonction de tous les constituants est une tautologie dans le langage de la logique des prédicats monadiques. Une formule qui est présentée comme la disjonction des constituants est dite en *forme normale distributive*. Von Wright (1951) étendra la notion de constituant à la logique modale.

Les constituants en logique modale

Von Wright (1951) étudie quatre groupes de modalités :

- les modalités aléthiques (*nécessaire*, *possible*, *contingent*, *impossible*) ;
- les modalités épistémiques (*vérifié* ou *connu comme vrai*, *indécidé*, *falsifié* ou *connu comme faux*) ;
- les modalités déontiques (*obligatoire*, *permis*, *interdit*, *indifférent*) ;
- les modalités existentielles (*universel*, *existant*, *vide*).

Le point de départ des recherches de Von Wright est l'observation du fait que les relations formelles entre les concepts au sein d'un groupe sont analogues à celles des concepts au sein d'autres groupes. Dans la classe des modalités déontiques, par exemple, si une proposition est obligatoire alors sa négation est interdite. Sa contrepartie au sein des modalités aléthiques est « si une proposition est nécessaire, alors sa négation est impossible », qui est valable également. Von Wright développe sa première technique relative aux constituants en une méthode qui décide, de concert avec les tables de vérité, si un énoncé modal exprime une « vérité de logique » ou non. Par cette dernière, von Wright entend un énoncé dont la vérité dépend « de la nature logique spécifique des concepts modaux », comme par exemple

$$\Diamond A \wedge \Box(A \to B) \to \Diamond B$$

(Von Wright, 1951, p. 10.)

Voici une illustration de la technique de von Wright pour le système modal qu'il appelle M_1 et qui étudie les M_1-énoncés, c'est-à-dire les composés vérifonctionnels de M_1-énoncés atomiques et/ou de N_1-énoncés atomiques où :

- les M_1-énoncés atomiques sont des énoncés atomiques préfixés par $\Diamond$ ou par des composés vérifonctionnels d'énoncés atomiques où le composé est préfixé par $\Diamond$;
- les N_1-énoncés atomiques sont des énoncés atomiques préfixés par $\Box$ ou par des composés vérifonctionnels d'énoncés atomiques préfixés par $\Box$.

À noter que le système M_1 ne contient pas de modalités itérées.

Von Wright montre comment les principes modaux :

(I) Si $\Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$;

(II) Si A et B sont logiquement équivalents, alors $\Diamond A$ et $\Diamond B$ sont logiquement équivalents (*i.e.* ils ont les mêmes valeurs de vérité) ;

(III) Toute formule propositionnelle A est elle-même possible, ou sa négation est possible ;

(IV) Si une proposition est une tautologie, alors la proposition disant qu'elle est nécessaire est aussi une tautologie ;

fournissent, combinés avec la méthode des tables de vérité, une procédure de décision pour chaque M_1-énoncé, c'est-à-dire une procédure mécanique qui montre si un M_1-énoncé est une tautologie de la logique modale ou non.

Montrons que le M_1-énoncé $\Diamond(p \vee \neg p)$ est une tautologie. La forme normale disjonctive de p (dans le langage qui contient p comme son unique atome) est p, et la forme normale disjonctive de $\neg p$ est $\neg p$.

En vertu de **(I)**, $\Diamond(p \vee \neg p)$ est équivalent à $(\Diamond p \vee \Diamond\neg p)$. Ses constituants sont $\Diamond p$ et $\Diamond\neg p$. Considérons maintenant toutes les distributions de valeurs de vérité possibles sur les deux constituants :

$\Diamond p$	$\Diamond\neg p$	$(\Diamond p \vee \Diamond\neg p)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Il y a néanmoins une restriction imposée par **(III)** : la dernière configuration de valeurs de vérité ne peut pas se produire et doit donc être éliminée. Nous en concluons que nos énoncés initiaux s'avèrent « logiquement vrais dans le système M_1 ».

Von Wright (1951, chapitre IV) construit également un système de modalités épistémiques en utilisant les contreparties épistémiques des principes **(I)-(IV).** Elles sont obtenues en remplaçant « possible » par « non falsifié » puis en définissant les autres modalités épistémiques en termes de « falsifié ». Ainsi A est falsifié, FA, exprime la même proposition que la proposition que la négation de A est vérifiée, $V\neg A$. Et A est indécidé peut être exprimé par $\neg VA \wedge \neg V\neg A$ ou, ce qui est équivalent, $\neg FA \wedge \neg F\neg A$. Du point de vue du « comportement formel », il en ressort ainsi que « le vérifié correspond au nécessaire, l'indécidé au contingent, et le falsifié à l'impossible. »

Dans l'Appendice II, von Wright étudie divers systèmes axiomatiques et les compare aux systèmes de C. I. Lewis. Il signale le fait que si 'vérifié' ou 'connu comme vrai' font référence à la connaissance effective d'une personne particulière, alors les contreparties des principes de Lewis peuvent ne pas valoir. Hintikka (1962) interprète par la suite ces notions de la même manière que son professeur : elles font référence à des agents idéalisés.

Une dernière observation. Von Wright a découvert une méthode qui établit le fait qu'un M_1-énoncé exprime une vérité de logique, en utilisant les tables de vérité et les constituants. La méthode n'exige pas de définir la valeur de vérité d'énoncés modaux de forme $\Diamond p$. En d'autres termes, il définit la vérité logique pour des formules modales sans définir leur vérité. Pour ce qui est des formules qui ne sont pas des vérités logiques du système modal en question, on ne peut rien dire. La méthodologie de von Wright s'est avérée particulièrement commode pour son analyse logique des normes et s'est muée par la suite en une conception qu'il a appelée « logique sans vérité ».

Après avoir écouté les conférences de von Wright au cours des années 1947-1948, Hintikka, alors âgé de 21 ans, s'attela à la tâche d'étendre les formes normales distributives à la logique du premier ordre tout entière, symboles de relation inclus. Le projet déboucha sur sa thèse de doctorat, *Distributive Normal Forms in the Calculus of Predicates* (1953), où Hintikka démontre entre autres que toute formule du premier ordre est équivalente à une disjonction de constituants (canoniques). Dans le cas particulier où l'énoncé est une généralisation consistante (un énoncé quantificationnel sans constante d'individu), Hintikka a démontré qu'il peut être exprimé sous la forme d'une disjonction finie de constituants (chaque constituant possède une profondeur quantificationnelle finie). Les résultats de Hintikka sont mieux connus de la communauté à partir de Hintikka (1964). Les constituants et les formes normales distributives sont devenus le pilier méthodologique de ce qui fut connu par la suite comme l'école de logique inductive et de philosophie des sciences de Hintikka, laquelle comprenait, outre Hintikka lui-même, ses étudiants R. Tuomela, R, Hilpinen et I. Niiniluoto. Je ne vais pas m'intéresser ici à ces développements et je vais concentrer mon attention sur les travaux de Hintikka en logique modale.

Kripke (1959)

Il peut être utile de mettre les travaux de von Wright en perspective en les comparant à Kripke (1959). Kripke considère un langage de prédicats modal avec identité, composé de variables d'individus, de variables de propositions, de variables de prédicats, de l'identité, et de l'opérateur modal $\Box$. Les variables propositionnelles constituent un cas particulier des variables de prédicats : c'est le cas dans lequel l'arité de ces dernières est $n = 0$. Ainsi la formule $A = \exists x_1 (P(x_1) \wedge Q(x_2)) \vee \Box (p \wedge q)$ est une formule du langage de Kripke où la seule variable d'individus libre est x_2. Ignorons pour le moment les variables d'individus et de propositions d'arité strictement supérieure à 0, et considérons uniquement la restriction du langage aux variables de propositions et aux opérateurs modaux.

Modèles pour la logique modale propositionnelle

Kripke introduit la notion d'un *modèle pour une formule modale A* (de notre langage restreint) : c'est une paire (G, K) où $G \in K$, et K est un ensemble d'assignations complètes, de telle sorte que chaque élément $H \in K$ assigne à toute variable propositionnelle la valeur de vérité V (vrai) ou F (faux). Ainsi, une assignation complète ou « monde possible » est une ligne d'une table de vérité (tronquée) (*i.e.* une assignation de valeur de vérité aux variables propositionnelles atomiques de A), et un modèle est une *table de vérité tronquée*, c'est-à-dire une table de vérité où quelques lignes (mais pas toutes) peuvent être absentes. Une des lignes, G, est sélectionnée au titre de *monde réel*. Étant donné un modèle (G, K) pour la formule modale propositionnelle A, toute sous-formule de A reçoit une valeur de vérité relative à une assignation arbitraire (un monde possible) $H \in K$:

- Les valeurs de vérité des connecteurs propositionnels sont standard :
- $H(\Box B) = V$ ssi $H'(B) = V$ pour tout $H' \in K$; sinon $H(\Box B) = F$
- $H(\Diamond B) = V$ ssi $H'(B) = V$ pour au moins un $H' \in K$; sinon $H(\Diamond B) = F$
- A est *valide dans le modèle* $M = (G, K)$ si et seulement si A est vrai dans le « monde réel », c'est-à-dire $G(A) = V$.

Pour prendre un exemple, soit A dénotant la formule : $\Diamond p \wedge \Box(p \to q) \to \Diamond q$. Voici deux modèles pour A

M_1 =:

p	q
T	T
T	F

M_2 =:

p	q
F	F

et voici, correspondant à chaque modèle, la spécification complète de la valeur de vérité de chaque sous-formule de A relativement à chaque assignation (monde possible) dans le modèle :

M_1 =:

p	q	$p \to q$	$\Diamond p$	$\Diamond q$	$\Box(p \to q)$	$\Diamond p \wedge \Box(p \to q)$	A
V	V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F	V

et

M_2 =:

p	q	$p \to q$	$\Diamond p$	$\Diamond q$	$\Box(p \to q)$	$\Diamond p \wedge \Box(p \to q)$	A
F	F	V	F	F	V	F	V

Kripke définit par ailleurs les notions suivantes :

- A est *satisfiable* si et seulement s'il y a un modèle (G, K) tel que A est valide dans (G, K) ;
- A est (universellement) valide si A est valide dans tout modèle ;
- B est *sémantiquement entraîné* par A si

$$A \to B$$

est universellement valide.

Kripke appelle *S5-tautologie* une formule universellement valide. Kripke (1959) nous dit que, dans une version antérieure de l'article, il a prouvé le théorème de complétude pour le système modal propositionnel $S5$:

Théorème 8. $\vdash_{S5} A$ si et seulement si A est une $S5$-tautologie.

Dans la note 4, il ajoute que « la connaissance de l'article de Beth m'a conduit à généraliser les tables de vérité en tableaux sémantiques et un théorème de complétude. » L'article de Beth auquel Kripke fait référence est *Semantic Entailment and Formal Derivability* (Beth, 1955). Que l'on me permette de dire quelques mots au sujet de la généralisation dont parle Kripke.

Kripke (1959) : les modèles pour la logique modale des prédicats

Revenons au langage originel de Kripke (1959), qui contient aussi des variables d'individus et des variables de prédicats d'arité quelconque. Sa notion d'assignation (monde possible) complète est plus large que celle décrite plus haut, qui se limitait aux variables propositionnelles.

Le point de départ est désormais un ensemble non-vide d'individus, appelé *domaine*. Toutes les assignations complètes dans K sont à présent relativisées à une formule A et un domaine D ; en outre, elles s'accordent toutes sur les variables libres de A.

Étant donné un ensemble non-vide D d'individus, une *assignation complète* pour A dans D est désormais une fonction qui assigne :

- à chaque variable d'individu libre de A, un individu dans D,
- à chaque variable propositionnelle qui est une sous-formule de A, la valeur de vérité V ou la valeur de vérité F, (c'était notre exemple précédent), et
- à toute variable de prédicat à n places P figurant dans A, une relation à n places sur D.

Étant donné que toutes les assignations dans K s'accordent sur les variables libres de A, leur point de désaccord se situe dans l'interprétation des variables de prédicats dans A.

Un *modèle de* A et de D est une paire ordonnée (G, K) d'assignations complètes pour A dans D, où $G \in K$, et toutes les assignations de K s'accordent sur les variables libres de A. L'assignation G est censée jouer le rôle du monde réel, et l'ensemble K est conçu comme étant l'ensemble de tous les mondes possibles. Noter qu'il n'y a pas de relation d'accessibilité dans K.

Étant donné un modèle (G, K) pour A et D, toute sous-formule B de A reçoit la valeur V ou F relativement à une assignation arbitraire $H \in K$ de manière récursive :

1. Si B est une variable propositionnelle, alors $H(B)$ est déjà défini

2. Si B est la formule atomique $P(x_1, \dots, x_n)$, alors $H(B) = V$ si et seulement si le n-uplet $(a_1, \dots, a_n)$ assigné par H aux variables libres $x_1, \dots, x_n$ appartient à $H(P)$; sinon $H(B) = F$.
3. Si B est $x_1 = x_2$, alors $H(B) = V$ si et seulement si $H(x_1) = H(x_2)$; sinon $H(B) = F$.
4. Les clauses définissant les connecteurs propositionnels sont standard.
5. Si B est $\forall xC(x)$, alors $H(B) = V$ si et seulement si $H(C(x)) = V$ pour toute assignation (partielle) d'un élément de D à x ; $H(B) = F$, sinon (l'assignation partielle doit être cohérente par rapport à H).
6. Si B est $\Box C$, alors $H(B) = V$ si et seulement si $H'(C) = V$ pour tout $H' \in K$; sinon $H(B) = F$.

Quelques éléments sont à souligner :

- Les mondes possibles sont des assignations complètes ;
- Toutes les variables d'individus sont interprétées dans un domaine d'individus D communément partagé (et leur interprétation est « rigide ») ;
- L'interprétation des variables de prédicats (variables propositionnelles incluses) peut varier d'un monde à un autre ;
- Étant donné qu'il n'y a pas de relation d'accessibilité, $\Box$ exprime une notion universelle ($S5$) de nécessité.

Une formule A est dite *valide dans un modèle* (G, K) de A et de D si $G(A) = V$. *A est valide* dans D si A est valide dans tout modèle de A dans D. A est *satisfiable* s'il y a un domaine non-vide D et un modèle de A dans D tel que A est valide dans ce modèle. Enfin, A est *universellement valide* si A est satisfiable dans tout domaine non-vide D. La formule B est *sémantiquement entraînée* par $A_1, A_2, \dots, A_n$ si et seulement si $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$ est universellement valide. À noter que si $n = 0$, cela revient à dire que B est universellement valide.

Kripke (1959) : les tableaux sémantiques

La section précédente a décrit la façon dont Kripke (1959) a généralisé la notion tarskienne de modèle pour traiter la vérité des formules modales. Dans la présente section, nous décrivons la façon dont Kripke (1959) généralise les tableaux sémantiques (à deux colonnes) de Beth afin de démontrer que B est *sémantiquement entraîné* par A_1, $A_2, \dots, A_n$ (*i.e.* $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$ est universellement valide) si et seulement si la construction commençant par un tableau dans lequel $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ apparaît dans la partie gauche et où B apparaît dans la partie droite est close. Dans le cas particulier où $n = 0$, Kripke démontre que B est universellement valide si et seulement si la construction commençant par un tableau dans lequel B apparaît dans la partie droite est close. Pour être en mesure d'adapter sa généralisation des modèles à des ensembles de modèles, Kripke s'est aperçu qu'il avait besoin de réaliser les tableaux sémantiques de Beth sous forme d'*ensembles de tableaux*. Ainsi, au début de la construction, nous commençons avec un ensemble de tableaux qui est un singleton, au sens où il se compose d'un tableau ayant $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n)$ dans la partie gauche et B dans la partie droite.

Kripke fait la distinction entre *tableaux principaux* et *tableaux auxiliaires* (contreparties des mondes possibles introduits par l'opérateur de possibilité). Autrement dit, chaque opérateur de possibilité $\Diamond B$ introduit un tableau auxiliaire. La combinaison d'un tableau principal et de ses tableaux auxiliaires forme un ensemble de tableaux *alternatif*. La règle de disjonction divise en outre un ensemble de tableaux alternatif en deux ensembles alternatifs. En voici les règles. Je m'intéresse ici seulement aux détails qui sont utiles pour une comparaison avec l'œuvre de Hintikka.

Voici trois notions techniques importantes :

- Un *tableau est clos* ssi soit une formule figure dans ses deux colonnes à la fois, soit $a = a$ figure dans sa colonne de droite pour une variable a quelconque.
- Un *ensemble de tableaux* (*alternatif*) *est clos* ssi au moins un de ses membres (soit principal, soit auxiliaire) est clos.
- Une *construction est close* ssi tous ses ensembles alternatifs sont clos.

Kripke prouve deux lemmes qui établissent l'équivalence entre (clôture des) tableaux sémantiques et validité universelle (relation sémantique d'entraînement).

Lemme 1. Si la construction commençant avec $\{T\}$, telle que le tableau T a $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ dans la partie gauche et B dans la partie droite, est close, alors B est *sémantiquement entraîné* par $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Lemme 2. Si la construction commençant avec $\{T\}$, telle que T a $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ dans la partie gauche et B dans la partie droite, n'est pas close, alors B n'est pas *sémantiquement entraîné* par $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Il peut être utile d'illustrer ces notions avec un exemple. Nous allons montrer que la réciproque de la formule de Barcan

$$\Box\forall xFx \to \forall x\Box Fx$$

est universellement valide. Nous commençons une construction avec un ensemble dont le seul membre est le tableau T_1 :

$$T_1 : \quad \begin{array}{c|c} \Box\forall xFx & \forall x\Box Fx \\ \hline & \end{array}$$

(En d'autres termes, nous supposons que $\Box\forall xFx$ est vrai et que $\forall x\Box Fx$ est faux.) Nous instancions la formule de la partie droite avec la nouvelle variable d'individu 'a' :

$$T_1 : \quad \begin{array}{c|c} \Box\forall xFx & \forall x\Box Fx \\ \hline & \Box Fa \end{array}$$

La formule $\Box Fa$ introduit un tableau auxiliaire T_2 :

$$T_2 : \quad \begin{array}{c|c} & Fa \\ \hline & \end{array}$$

À ce stade, la construction se compose ainsi d'une alternative (ensemble de tableaux) avec deux membres, $C = \{T_1, T_2\}$. Mais étant donné que T_1 a $\Box\forall xFx$ dans sa partie gauche, nous ajoutons $\forall xFx$ à la partie gauche des deux tableaux puis instancions avec 'a' (nous pouvons faire ceci, parce que 'a' figure déjà dans le tableau). T_2 devient

$$T_2 : \quad \begin{array}{c|c} & Fa \\ \hline \forall xFx & \\ Fa & \end{array}$$

et se ferme. L'alternative C est close ainsi et, considérant que c'est la seule alternative de la construction, la construction entière se ferme.

Revenons maintenant à la preuve du Lemme 2. Elle consiste à supposer que la construction n'est pas close, ce qui veut dire qu'à chaque stade de la construction au moins un des ensembles de tableaux alternatifs n'est pas clos et produit ainsi un *contre*-modèle : un domaine D et un modèle (G, K) dans D tels que $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$ n'est pas valide dans (G, K). Nous ne nous intéresserons pas aux détails ici, une fois encore, mais il est important d'indiquer la façon dont Kripke tire d'un ensemble alternatif de tableaux ouvert et approprié

- un domaine D composé de toutes les variables libres figurant dans l'alternative choisie
- un ensemble K d'assignations complètes (mondes possibles), chaque élément $H \in K$ correspondant à un tableau dans l'alternative ouverte

tel que nous avons, pour toute assignation $H \in K$:

- pour toute variable libre x figurant dans le tableau $H(x) = x$,
- pour toute variable propositionnelle p, $H(p) = V$ si p figure dans la partie gauche du tableau, et $H(p) = F$ si p figure dans la partie droite
- pour toute variable de prédicat n-aire P^n, l'ensemble des n-uplets ordonnés $(x_1, \ldots, x_n) \in H(P)$ ssi $P^n(x_1, \ldots, x_n)$ apparaît dans la partie gauche du tableau.

Le résultat principal de Kripke (1959) est le *théorème de complétude* : Si A est universellement valide, alors A est prouvable dans le système modal quantificationnel $S5$ avec identité (= $QS5^{*=}$).

L'ingrédient principal de la preuve est le Lemme suivant (Lemme 4) : Si A est la formule caractéristique du stade initial de la construction et B la formule caractéristique de n'importe quel stade de la construction, alors $\vdash_{QS5} A \to B$.

Ce Lemme exploite l'équivalence d'une certaine propriété des tableaux sémantiques avec la notion modèle-théorique de validité universelle.

Kripke (1959) prouve également un *Théorème de fiabilité* : Si $\vdash_{QS5^{*=}} A \to B$ alors A est universellement valide.

Kripke clôt l'article avec la remarque suivante :

> « Le théorème de complétude proposé dans le présent article est fondé sur le système $S5$. Il est bien connu qu'il existe un grand nombre de systèmes modaux alternatifs ; cinq systèmes modaux distincts sont proposés dans le seul [C. I. Lewis (1932)]. Si par ailleurs la logique modale est étendue pour admettre la quantification et l'identité, il y a d'autres lois controversées telles que
>
> $$\forall x \Box Fx \to \Box \forall x Fx$$
>
> et
>
> $$\forall x \forall y\ (x = y \to \Box x = y)$$
>
> Certains de ces systèmes, différents de $S5^{*=}$, conduisent à des notions différentes de complétude ; et toute comparaison entre elles à des fins d'acceptabilité peut s'appuyer sur un examen de ces notions sémantiques alternatives. Les détails de telles considérations apparaîtront dans la suite du présent article. »

En effet, aussi bien la formule de Barcan que la nécessité de l'identité sont valables dans le système donné ici (le domaine unique !). Kripke écrira un autre article (Kripke 1963a) où, se démarquant du dispositif précédent, il proposera des modèles quantificationnels dans lesquels : a) les assignations complètes sont remplacées par des mondes possibles sous forme de points ; b) chaque monde possible a son propre univers ; et c) la formule de Barcan et sa converse ne sont pas valides. Le précédent cadre sera généralisé dans Kripke (1963b) à d'autres systèmes modaux propositionnels.

Hintikka (1955)

Les ensembles modèles

Hintikka (1955) introduit les *ensembles modèles* (*model sets*) comme un nouvel outil en sémantique logique, et il construit une nouvelle preuve de la complétude de la logique du premier ordre. Un ensemble modèle est un ensemble d'énoncés du langage logique approprié qui constitue la description partielle d'un état de choses possibles. Les ensembles modèles ne doivent pas être confondus avec les modèles. Hintikka est conscient du fait que « La notion de base de la logique des prédicats ensembliste est celle de modèle », qui est déterminée par :

- un ensemble I (l'univers) d'objets, appelés individus
- une application φ de toutes les constantes d'individus sur I, et
- une application ψ de tous les prédicats n-adiques dans les classes de n-uplets d'éléments de I.

Hintikka est conscient aussi du fait que les *règles de vérité* donnent la notion de *vrai dans* un modèle M (pour des *énoncés* en forme normale négative) :

1. $P(a_1, \ldots, a_n)$ est vrai si et seulement si $(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) \in \psi(P)$
2. $\neg P(a_1, \ldots, a_n)$ est vrai et seulement si $P(a_1, \ldots, a_n)$ n'est pas vrai
3. $(K \wedge L)$ est vrai si et seulement si K et L sont tous les deux vrais
4. $(K \vee L)$ est vrai si et seulement si K et L sont tous les deux vrais ou si l'un d'eux est vrai
5. $\exists xK$ est vrai si et seulement si $K(a/x)$ est vrai pour quelque constante d'individu a.
6. $\forall xK$ est vrai si et seulement si $K(a/x)$ est vrai pour toute constante d'individu a.

Pour une définition de la vérité dans un modèle, il y a quelque chose de troublant ici. Hintikka n'utilise pas la notion tarskienne de satisfaction relativement à une assignation, mais celle de quantification substitutionnelle. Puis il définit un modèle dans lequel tous les éléments d'un ensemble λ de formules sont vrais, un *modèle de* λ. Enfin, un ensemble d'énoncés λ est appelé *satisfiable* s'il a un modèle. Hintikka ne retient pas la notion de modèle, il s'intéresse plutôt à l'ensemble μ des formules qui sont satisfiables. Il résulte de la partie « seulement si » des règles de vérité ci-dessus que tout ensemble μ de ce genre satisfait les conditions suivantes :

(**C.0**) Si $A \in \mu$, alors $\neg A \notin \mu$

(**C.1**) Si $(A \wedge B) \in \mu$, alors $A \in \mu$ et $B \in \mu$

(**C.2**) Si $(A \vee B) \in \mu$, alors $A \in \mu$ ou $B \in \mu$

(**C.3**) Si $\exists xK \in \mu$, alors $K(a/x) \in \mu$ pour au moins une constante d'individu a

(**C.4**) Si $\forall xK \in \mu$, alors $K(a/x) \in \mu$ pour toute constante d'individu a figurant dans les formules de μ.

Hintikka appelle *ensemble modèle* tout ensemble satisfaisant les conditions (**C.0**)-(**C.4**). À noter qu'un ensemble modèle ne peut pas contenir un énoncé et sa négation à la fois (comme stipulé par **C.0**) mais il peut ne contenir aucun d'eux. En ce sens, un ensemble modèle est seulement la *description partielle* d'un « monde possible ». La raison du choix du terme « ensemble modèle » est que l'on peut récupérer à partir d'un ensemble modèle μ un modèle (en fait plusieurs modèles) dans lequel tous ses éléments sont vrais, sous une interprétation convenable (Hintikka 1955, p. 26). Cette interprétation est très naturelle :

1. I est conçu comme étant l'ensemble des constantes d'individus figurant dans les formules de l'ensemble modèle μ.
2. Pour les éléments de I, φ est simplement l'application d'identité $a \to a$.
3. $\psi(P^n)$ est l'ensemble de tous les n-uplets $(a_1, \ldots, a_n)$ tels que $P^n(a_1, \ldots, a_n) \in \mu$.

L'un des principaux résultats de Hintikka en 1955 est celui-ci (p. 27) :

> **Théorème I**. Un ensemble de formules est satisfiable si et seulement si il peut être intégré dans un ensemble modèle.

Insistons sur le fait que le Théorème I établit un lien entre la notion modèle-théorique de satisfiabilité, d'une part, et la notion d'ensemble modèle d'autre part.

Hintikka (1957) : les quantificateurs en logique déontique

À la différence de son professeur von Wright, Hintikka n'utilise pas les constituants mais les ensembles modèles dans ses études de logique modale. Hintikka (1957a), (1957b), (1961) et (1962), s'attèlent à la tâche d'étendre la notion de satisfiabilité à des ensembles de formules contenant les opérateurs aléthiques « il est possible », « il est nécessaire », les opérateurs déontiques « il est obligatoire », « il est permis », et les opérateurs doxastiques « l'agent croit que », « l'agent sait que », etc. Nous porterons notre attention ici sur l'article de Hintikka « Quantifiers in Deontic Logic » (Hintikka 1957b). L'article souvent cité, « Quantification and Modality » (Hintikka 1961), et l'ouvrage bien connu *Knowledge and Belief* (Hintikka 1962), ajoutent très peu de technicité à cet article.

Hintikka n'adopte pas le langage modal propositionnel de von Wright comme le langage de la logique déontique. En d'autres termes, il n'accepte pas les représentations OA, FA et PA où les opérateurs 'O', 'F' et 'P' sont appliqués à des formules propositionnelles. Il n'adopte pas non plus la représentation de Prior, qui utilisait les lettres a, b, … pour les propriétés d'actes et qui se lisent 'un acte du genre a est effectué', etc. Dans le formalisme de Prior (Prior 1957), on a des formules comme Pa, $O\neg b$, $P(a \wedge b)$ signifiant 'un acte du genre a est permis', etc. Hintikka utilise à la place des quantificateurs pour dénoter des actes individuels (réalisés dans une situation particulière). Le $(a \wedge b)$ de Prior est ainsi retranscrit désormais sous la forme $\exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$, etc., et les opérateurs déontiques sont appliqués à des formules de prédicats. Dire qu'un acte de type A est interdit, c'est dire que tout acte de type A doit ne pas avoir lieu, c'est-à-dire $\forall xO\neg A(x)$ (ou peut-être $O\forall x\neg A(x)$.) Et dire que A est obligatoire c'est dire qu'un des actes de l'agent est une instance de A, c'est-à-dire $O\exists xA(x)$. Un acte est permis si, dans toute situation particulière, on est autorisé à accomplir un acte de ce type, $\forall xPA(x)$ (souvent abrégé PA).

Hintikka (1957b) nous dit que ses recherches prolongent son traitement antérieur de la théorie de la quantification (les ensembles modèles), lequel constitue la base d'une nouvelle théorie générale de la logique modale développée dans un manuscrit non publié (p. 10). Le manuscrit a malheureusement été perdu. Hintikka porte explicitement son attention, non sur les preuves, mais sur les aspects qui comptent pour d'éventuelles applications philosophiques. Son idée peut-être la plus importante est que la satisfiabilité d'un ensemble d'énoncés comportant des notions modales nous oblige à considérer des ensembles d'ensembles de formules, c'est-à-dire des ensembles d'ensembles modèles mutuellement reliés par une relation d'accessibilité :

> Considérons d'abord les formules de forme *PA*. Que voulons-nous dire en disant que *A* est permis ? Évidemment, le contenu de cette déclaration ne peut pas être pleinement expliqué en parlant de ce qui a réellement lieu. Lorsque nous parlons de permission, nous ne parlons pas vraiment de l'état de choses réel… Cela veut dire que nous ne pouvons pas formuler de règles pour une formule de forme *PA* figurant dans μ en termes de μ, car μ était conçu comme portant sur l'état de choses réel. Nous devons considérer plutôt, outre μ, un autre ensemble μ^* relié à μ d'une certaine manière. Cette relation sera exprimée en disant que μ^* est *co-permissible* avec μ. Nous pouvons concevoir μ^* comme portant sur l'état de choses (imaginé) dans lequel *A* serait censé avoir lieu. (Hintikka, 1957b, p. 11)

Une chose remarquable dans ce passage est que la notion de relation d'accessibilité (co-permissibilité) est explicitement mentionnée. Hintikka appelle *système modèle* un ensemble d'ensembles modèles enrichi d'une relation de co-permissibilité, et il le dénote souvent par Ω. Une autre de ses idées majeures est que le comportement logique des opérateurs déontiques se reflète dans les contraintes pesant sur la relation de co-permissibilité. Il observe plusieurs contraintes de ce genre :

(**C.5**) Si $PA \in \mu \in \Omega$, alors il y a dans Ω au moins un ensemble modèle v co-permissible avec μ tel que $A \in v$.

Hintikka exige plus encore : si v est co-permissible avec μ, alors tout ce qu'on doit faire dans μ est conçu comme étant fait dans v (*idem*, p. 12) :

(**C.6**)+ Si $OA \in \mu \in \Omega$, et si $v \in \Omega$ est co-permissible avec μ, alors $A \in v$.

Hintikka signale aussi que les obligations réellement existantes doivent être valables dans les mondes co-permissibles :

(**C.6**) Si $OA \in \mu \in \Omega$, et si $v \in \Omega$ est co-permissible avec μ, alors $OA \in v$.

Il y a une condition supplémentaire sur les obligations qui dérive du fait que les mondes co-permissibles sont conçus comme des mondes déontiquement parfaits où toutes les obligations sont remplies. Autrement dit, si un monde v est co-permissible avec un monde donné μ et si A est obligatoire dans v, alors A est le cas dans v :

(**C.7**) Si $OA \in \nu \in \Omega$, et si ν est co-permissible avec au moins un μ, alors $A \in \nu$.

Et maintenant la généralisation de la notion de satisfiabilité.

Un ensemble fini de formules déontiques est *satisfiable* si et seulement s'il peut être intégré dans un système modèle (Ω, R) où Ω est un ensemble d'ensembles modèles et R satisfait les conditions (**C.5**), (**C.6**) et (**C.7**) concernant la relation de co-permissibilité. Comme Hintikka l'indique, cette définition nous donne également une méthode pour démontrer qu'un ensemble fini d'énoncés λ est satisfiable : nous produisons un système modèle (Ω, R) tel que

(i) $\lambda \subseteq \mu$ pour au moins un élément μ de Ω, et

(ii) les conditions (**C.0**)-(**C.4**) et (**C.5**), (**C.6**) et (**C.7**) sont satisfaites.

Un énoncé A est défini comme *valide* si et seulement si $\{\neg A\}$ n'est pas satisfiable (*i.e.* si $\neg A$ est contradictoire). Pour établir la validité, il nous faut donc aussi une méthode pour démontrer qu'un ensemble fini de formules λ n'est pas satisfiable. Auparavant, soulignons que, contrairement à sa notion de satisfiabilité pour les énoncés du premier ordre ordinaires, la notion de satisfiabilité de Hintikka pour les énoncés déontiques n'est pas une notion modèle-théorique, mais repose sur sa notion de système modèle. Je trouve quelque peu malheureux que Hintikka ait choisi de procéder de cette façon, au lieu d'ancrer la satisfiabilité dans une généralisation de la notion de modèle comme Kanger (1957), Kripke (1959) et par exemple Montague (1960) l'ont fait. Mon collègue Simo Knuuttila, qui a fait partie du groupe de recherche de Hintikka au début des années 80, me dit que Hintikka s'en est rendu compte et a considéré avec sérieux une notion modèle-théorique de satisfiabilité conforme au cadre de Montague.

Hintikka (1957b) : les systèmes modèles sous forme de tableaux sémantiques

Afin de montrer qu'un ensemble λ d'énoncés déontiques n'est pas satisfiable, nous partons de $\{\lambda\}$ à titre d'ensemble initial d'ensembles de formules, et de la relation vide de co-permissibilité, et nous essayons d'élaborer un système modèle en ajoutant de nouvelles formules à λ et de nouveaux ensembles d'énoncés co-permissifs de façon appropriée. Tout ajout est censé supprimer une violation des conditions de clôture mentionnées plus haut. En suivant cette procédure, nous construisons à chaque étape un ensemble d'ensembles de formules Ω' reliés par une relation de co-permissibilité R'. Hintikka appelle *provisoirement co-permissibles* les ensembles de ce genre. Supposons ainsi que Ω' est l'ensemble d'ensembles d'énoncés élaborés jusqu'ici. Nous appliquons les instructions qui suivent pour gouverner l'introduction de nouveaux énoncés et ensembles :

(**E.11**) Si nous avons $\mu \in \Omega'$ et $(A \wedge B) \in \mu$ mais $A \notin \mu$, alors nous pouvons ajouter A à μ.

(**E.12**) Si nous avons $\mu \in \Omega'$ et $(A \wedge B) \in \mu$ mais $B \notin \mu$, alors nous pouvons ajouter B à μ.

(**E.2**) Si nous avons $\mu \in \Omega'$ et $(A \vee B) \in \mu$ mais ni $A \notin \mu$ ni $B \notin \mu$, alors nous pouvons ajouter soit A soit B à μ.

(**E.3**) Si nous avons $\mu \in \Omega'$ et $\exists xA \in \mu$ mais $A(b/x) \notin \mu$ pour toute variable libre 'b' figurant dans les formules de μ, alors nous pouvons ajouter $A(b/x)$, où 'a' est une variable libre qui ne figure dans aucune des formules des membres de Ω.

(**E.4**) Si nous avons $\mu \in \Omega'$ et $\forall xA \in \mu$ mais $A(b/x) \notin \mu$ pour au moins une variable libre 'b' figurant dans les formules de μ, alors nous pouvons ajouter $A(b/x)$.

(**E.5**) Si nous avons $\mu \in \Omega'$ et $PA \in \mu$ mais $A \notin \nu$ pour tout ν provisoirement co-permissible avec μ, alors nous pouvons ajouter $\{A\}$ à Ω à titre de nouvel ensemble modèle et stipuler qu'il est provisoirement co-permissible avec μ. (Nous supposons que toutes les relations de co-permissibilité provisoire proviennent de l'application de la règle (**E.5**))

(**E.6**) Si nous avons $\mu, \nu \in \Omega'$, $OA \in \mu$ mais $OA \notin \nu$ et si ν est provisoirement co-permissible avec μ, alors nous pouvons ajouter OA à ν.

(**E.7**) Si nous avons $\mu \in \Omega'$, $OA \in \mu$ mais $A \notin \mu$ et si μ est provisoirement co-permissible avec au moins un $\nu \in \Omega'$, alors nous pouvons ajouter A à μ.

La procédure de Hintikka pour démontrer qu'un ensemble de formules λ n'est pas satisfiable doit être claire à présent. Nous partons d'un système modèle provisoire composé d'un ensemble modèle λ et de la relation de co-permissibilité vide, puis nous continuons d'appliquer plusieurs fois les règles **E**. Chaque fois que nous appliquons la règle (**E.5**) nous ajoutons un nouvel ensemble modèle provisoire et la relation de co-permissibilité appropriée. Et chaque fois que nous appliquons la règle (**E.2**) à un ensemble donné, le résultat se compose de deux systèmes modèles provisoires (chacun doté de sa propre relation de co-permissibilité). Chacun d'eux constitue la base indispensable à d'autres applications des règles. Nous essayons d'arranger les règles de telle manière que nous aboutissions à un ensemble d'ensembles dans lequel un des membres viole la règle (**C.0**) de toutes les manières possibles (eu égard à la façon dont ces règles peuvent être appliquées). Si nous y parvenons (si la construction est close, autrement dit), alors l'ensemble de départ λ est contradictoire.

Manifestement, ces règles concordent avec les règles de Kripke pour les *tableaux sémantiques de la logique modale*. Une différence est que Kripke (1959, 1963) utilise les tableaux à deux colonnes de Beth, tandis que les règles de Hintikka pour construire des systèmes modèles provisoires correspondent à des tableaux à une colonne. L'intégration des ensembles modèles de Hintikka pour la logique du premier ordre dans la méthode des tableaux en forme d'arbres se produisit bien plus tard, dans les travaux de Jeffrey (1967) et Smullyan (1968).

Hintikka (1957b) déclare être en mesure de démontrer ce qui suit :

- Si la construction partant de l'ensemble modèle provisoire $\{\lambda\}$ et de la relation de co-permissibilité vide est close, alors λ est contradictoire.

Il nous dit également que la réciproque est vraie : « Nous savons aussi (mais nous n'avons pas prouvé) que si λ est contradictoire, alors on peut parvenir d'une certain façon à une situation de ce genre. Il n'y a pas de procédure effective à cet effet, néanmoins. » (Hintikka 1957b, p. 15). Hintikka appelle ceci le *théorème de complétude de la logique déontique*.

Limitons notre attention au cas où λ ne contient qu'un seul énoncé, A. Kripke (1959) a établi ceci (Lemme 1 et Lemme 2) :

(i) La construction commençant par un tableau avec A dans la partie droite est close ssi A est universellement valide.

D'autre part, Hintikka « sait » (mais n'a pas prouvé) ceci :

- La construction partant de l'ensemble modèle provisoire $\{A\}$ et de la relation de co-permissibilité vide est close si et seulement si A est contradictoire.

Or, si nous remplaçons A par $\neg A$ et rappelons que, pour Hintikka, A est valide si et seulement si $\neg A$ est contradictoire (non satisfiable), nous obtenons ceci :

(ii) La construction partant de l'ensemble modèle provisoire $\{\neg A\}$ et de la relation de co-permissibilité vide est close si et seulement si A est valide.

Si l'on se rappelle que, dans un tableau à deux colonnes, les formules de la partie droite sont les formules fausses, il semble que Hintikka (1957b) et Kripke (1959) soient parvenus à des conclusions similaires. Mais si l'on y regarde de plus près, on s'aperçoit que ce n'est pas le cas : la notion de validité de Kripke est modèle-théorique, celle de Hintikka ne l'est pas. Bien que Hintikka appelle **(ii)** un théorème de complétude, il est difficile de voir ce qu'il relie. Dans le cas de Kripke, le théorème **(i)** relie la notion modèle-théorique de validité universelle à celle de tableaux sémantiques. Ceci n'est toutefois pas le théorème de complétude. Le théorème de complétude de Kripke relie la notion de validité universelle à la notion preuve-théorique de prouvabilité dans $S5^{*=}$. D'un autre côté, ce que Hintikka appelle le « théorème de complétude » relie deux notions définies en termes de systèmes modèles (tableaux). Ce fait a d'autres conséquences.

Hintikka allait utiliser **(ii)** dans la direction de gauche à droite dans la totalité de ses écrits à paraître sur la logique modale. En d'autres termes, toutes les fois qu'il avait l'intention de démontrer qu'une formule A est valide, il commençait une construction avec un système modèle provisoire composé de l'ensemble modèle $\{\neg A\}$ et de la relation d'accessibilité vide, puis il montrait qu'elle était close. Pour prendre un exemple, nous allons montrer que la formule (réciproque de la formule de Barcan) $O\forall xA(x) \rightarrow \forall xOA(x)$ est valide. Nous partons du système modèle provisoire composé de l'ensemble modèle $\{\mu\}$, où $\mu = \{O\forall xA(x) \wedge \neg\forall xOA(x)\}$ et de la relation de co-permissibilité vide. Puis nous continuons de la façon suivante :

1. $O\forall xA(x) \in \mu$ (**E.11**)
2. $\neg\forall xOA(x) \in \mu$, c'est-à-dire $\exists xP\neg A(x) \in \mu$ (**E.11**)
3. $P\neg A(b) \in \mu$ (**E.3**)
4. $\neg A(b) \in \nu$, où ν est une alternative à μ ((**E.5**) et (3))
5. $\forall xA(x) \in \nu$ ((**E.7**) et (1))
6. $A(b) \in \nu$ ((**E.4**) et (5))

La construction se clôt ainsi, et nous avons établi ce que nous affirmions. Jusqu'ici, tout va bien. Mais nous avons besoin également d'une réponse à cette question : que se passe-t-il lorsque la construction ne se ferme pas ? En d'autres termes, que pouvons-nous dire des formules qui ne sont pas valides ? Examinons un des exemples de Hintikka.

Rappelons la règle de quantification (**C.4**) et sa formulation (**E.4**), sous forme d'une règle de construction d'un tableau. Hintikka (1957, p. 21) considère la possibilité de remplacer la condition « $A(b/x) \notin \mu$ pour quelque variable libre 'b' figurant dans les formules de μ » par la condition plus souple « $A(b/x) \notin \mu$ pour quelque variable libre 'b' figurant dans au moins un élément du système modèle ». D'après lui, la condition assouplie revient à admettre que, si un individu 'b' existait dans un monde possible, alors il existerait aussi dans un autre. Hintikka remarque que si nous adoptions cette condition, nous serions en mesure d'établir la validité de

(41) $P\exists xA(x) \rightarrow \exists xPA(x)$.

Avant de donner les détails de l'argument de Hintikka, notons que si nous remplacions $A(x)$ par $\neg A(x)$ dans **(41)** et prenions la contraposition, nous obtiendrions

(41*) $\neg\exists xP\neg A(x) \rightarrow \neg P\exists x\neg A(x)$

qui équivaut à la formule $\forall xOA(x) \rightarrow O\forall xA(x)$. Celle-ci est mieux connue sous le titre de *formule de Barcan*.

Revenons maintenant à l'argument de Hintikka. Nous commençons comme d'habitude avec le système modèle provisoire $\{\mu\}$, où $\mu = \{P\exists xA(x) \wedge \neg\exists xPA(x)\}$ et avec la relation de co-permissibilité vide, puis nous continuons de la manière suivante :

(42) $P\exists xA(x) \in \mu$

(43) $\neg\exists xPA(x) \in \mu$, c'est-à-dire $\forall xO\neg A(x) \in \mu$

(44) $\exists xA(x) \in \nu$, (**(42)** et (**E.5**)), ν est co-permissible avec μ

(45) $A(a) \in \nu$ (**(44)** et (**E.3**))

(46) $O\neg A(a) \in \mu$ (**(43)** et la règle (**E.4**) modifiée)

(47) $O\neg A(a) \in \nu$ (**(46)** et (**E.6**))

(48) $\neg A(a) \in \nu$ (**(47)** et (**E.7**)).

Le système modèle provisoire qui en résulte, composé des ensembles modèles μ, ν et de la relation de co-permissibilité $\mu R\nu$, est clos. À noter que, dans **(46)**, nous avons instancié $\forall xO\neg A(x)$ qui « vaut » dans μ avec la variable libre 'a', laquelle ne figure pas dans les formules de μ, au sens où a n'existe pas dans μ. Hintikka trouve **(41)** contre-intuitive, parce qu'un acte de type A peut être permis même si aucun acte de ce type n'a jamais été accompli (Hintikka 1957b, p. 21). Pour cette raison, il rejette l'assouplissement de la condition (**E.4**).

Hintikka suivra cette stratégie encore et toujours au cours des années suivantes (Hintikka 1961,1962, par exemple). En d'autres termes, il bloque la validité de certaines formules modales qui introduisent des « présuppositions existentielles » en posant diverses restrictions sur les règles de quantification et sur la relation d'accessibilité. Mais une fois que la validité de ces formules est bloquée (autrement dit, lorsque le système modèle provisoire commençant avec la négation de la formule est ouvert), il reste encore la question de savoir si l'on peut dire quelque chose de plus à propos de la formule en question. C'est ici que la comparaison avec Kripke devient pertinente.

Kripke et Hintikka sur les théorèmes de complétude de la logique modale

Nous avons vu plus tôt, en rapport avec le Lemme 2 de Kripke, qu'à partir de l'alternative ouverte d'une construction commençant avec $(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n)$ dans la partie de gauche et B dans la partie de droite, Kripke (1959) extrait un univers non-vide D et un modèle (G, K) dans D tel que la formule initiale $(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow B$ n'est pas valide dans (G, K). En d'autres termes, (G, K) est un contre-modèle de $(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow B$. Cette procédure est absente des travaux de Hintikka, étant donné qu'il ne dispose ni de la notion de modèle ni de la notion de validité (satisfiabilité) fondée sur elle. Ainsi, pour revenir à l'exemple de Hintikka, il n'y a pas de procédure conduisant du système modèle ouvert avec les ensembles modèles μ et v et la relation de co-permissibilité μRv, à un contre-modèle de $P\exists xA(x) \rightarrow \exists xPA(x)$. L'absence de la partie modèle-théorique explique pourquoi Hintikka n'a pas ressenti le besoin d'un théorème de complétude servant de jonction entre la notion modèle-théorique de validité et la notion formelle de prouvabilité, comme chez Kripke. Cela n'exclut pas la possibilité de connecter la notion d'entraînement sémantique ou validité, telle qu'elle est issue des ensembles modèles, et la notion preuve-théorique de prouvabilité formelle dans les systèmes modaux quantifiés ($QS5^{*=}$, par exemple). Mais Hintikka n'a pas suivi cette direction non plus. La leçon qu'il a tirée des exemples examinés plus haut, c'est que les méthodes sémantiques ou quasi-sémantiques comme les ensembles modèles et les systèmes modèles affichent de façon plus explicite les engagements existentiels dans le contexte de la logique modale que les méthodes preuve-théoriques plus conventionnelles. Il illustre ce qu'il a en tête avec la formule

(49) $\exists xOA(x) \rightarrow O\exists xA(x)$.

Hintikka donne un argument qui montre que **(49)** peut être prouvée en logique déontique quantifiée en utilisant les règles de quantification standard et la distributivité de l'opérateur '*O*' sur les conjonctions (Hintikka 1957b, p. 22-23). Il nous dit que chacune des formules qui suivent est équivalente à celle qui lui succède :

(50) $\exists xOA(x)$

(51) $\exists xOA(x) \wedge \exists yA(y))$

(52) $\exists xOA(x) \wedge O\exists yA(y))$

(53) $\exists xOA(x) \wedge O\exists yA(y)$

Étant donné que Hintikka a trouvé **(49)** peu intuitive, il n'a perçu aucun moyen de développer une logique modale quantifiée sans restriction sur les règles de quantification. Mais d'un autre côté, il a pensé qu'il était bien plus difficile d'appliquer la restriction sur les règles de quantification que sur les systèmes modèles ; conclusion qui ne l'a guère incité à développer la théorie de la preuve de la logique modale quantifiée :

> Il s'avère qu'il n'est pas possible de construire un système axiomatique et déductif de logique déontique quantifiée sans limiter l'applicabilité des règles qui nous permettent de passer de **(50)** à **(51)** et de **(52)** à **(53)**. Le problème que pose une approche axiomatique conventionnelle est qu'elle rend extraordinairement difficile la perception de la nature et de la raison des modifications requises pour les différentes règles. (p. 23)

Références

- Beth, E. W., 1955, « Semantic entailment and formal derivability », *Mededelingen van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, Afdeling Letterkunde, N. R., 18, p. 309-342.
- Carnap, R., 1946, « Modalities and quantification », in *The Journal of Symbolic Logic*, 11, p. 33-64.
- Carnap, R., 1947, *Meaning and Necessity*, Chicago, Chicago University Press.

- Hintikka, J., 1953, *Distributive Normal Forms in the Calculus of Predicates*, *Acta Philosophica Fennica,* 6 ; réimprimé sous le titre « Distributive Normal Form in First-order logic », *in* J. N. Crossley et M. Dummett (éd.), *Formal Systems and Recursive Functions,* 1964, p. 47-90.
- Hintikka, J., 1955, « Two Papers on Symbolic Logic », *Acta Philosophica Fennica*, 8.
- Hintikka, J., 1957a, « Modality as Referential Multiplicity », in *Ajatus*, 20, p. 49-64.
- Hintikka, J., 1957b, « Quantifiers in Deontic Logic », *Societas Scientiarum Fennica, Commentationes humanarum litterarum*, vol. 23, n°4, Helsinki.
- Hintikka, J., 1961, « Modality and Quantification », in *Theoria*, 27, p. 119-128.
- Hintikka, J., 1962, *Knowledge and Belief. An Introduction to the Logic of the Two Notions*, Ithaca, New York, Cornell University Press. Les références renvoient ici à l'édition de 2005 préparée par V. Hendriks et J. Symons.
- Kanger, S., 1957, *Provability in Logic* (doctoral dissertation), Université de Stockholm – Almqvist & Wiksell, 1957.
- Kripke, S., 1959, « A Completeness Theorem in Modal Logic », in *The Journal of Symbolic Logic*, 24, p. 1-14.
- Kripke, S., 1963a, « Semantical Considerations on Modal Logic », *Acta Philosophica Fennica*, 16, Helsinki, p. 83-94.
- Kripke, S.,1963b, « Semantical Analysis of Modal Logic I. Normal Modal Propositional Calculi », *Zeitschrift fur Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 9, 1963, p. 67-96.
- Lewis, C. I., and Langford, C. H., 1932, *Symbolic Logic*, London, Century ; 2nde édition, New York, Dover, 1959.
- Montague, R., 1960, « Logical Necessity, Physical Necessity, Ethics, and Quantifiers », *Inquiry*, 3, 1960, p. 259-269.
- Prior, A. N., 1957, *Time and Modality*, Clarendon Press, Oxford, 1957.
- Von Wright, G. H., 1951, *An Essay in Modal Logic*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.